PŘEDNÁŠKA 25/10/2011

Definice: <u>Elementární matice</u> je matice vzniklá z E jednou z elem. řádk. úprav.

$$E_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & c \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & c & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Lemma</u>: A, A' ... matice téhož typu. $\overbrace{\text{TFAE}}^{\text{the following are equivalent}}$

1) A' vznikne z A jednou z el. řádk. úprav,

2) $\exists$ element. Q: $A' = QA$.

Pr

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A'$$

E_{23}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Lemma: Elementární matice jsou invertibilní a platí: 1) $(E_i(c))^{-1} = E_i(c^{-1})$

2) $(E_{ij}(c))^{-1} = E_{ij}(-c)$

3) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Tvrzení: Čtvercová matice A je invertibilní $\Leftrightarrow$ je řádkově ekvivalentní s E.

Důkaz: „$\Rightarrow$" A je invertibilní

A převedeme na schodovitý tvar (G-J tvar) (na A')

2 možnosti: 1) žádný řádek se nevynuluje

A' nemá žádný nulový řádek

$\Rightarrow A' = E$

2) některý z řádků se vynuluje

A' má nulový poslední řádek

A je invertibilní $\Rightarrow A'$ je invertibilní

tzn. $\exists (A')^{-1}$

$$A' \cdot (A')^{-1} = E$$

ale matice A' má nulový řádek

z toho vyplývá, že E má nulový řádek $\Rightarrow$ spor!

$\Rightarrow$ možnost 2) nenastane

„$\Leftarrow$" A je řádkově ekv. s jednotkovou maticí

musí $\exists$ matice $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$:

$$\underbrace{Q_n \cdot Q_{n-1} \cdot \ldots \cdot Q_2 \cdot Q_1}_{=:Q} \cdot A = E$$

$=: Q$ je invertibilní, protože je součinem inv. matic ($\exists Q^{-1}$)

$QA = E$ / vynásobím Q^{-1} zleva

$$\underbrace{Q^{-1} \cdot Q}_{=E} \cdot A = \underbrace{Q^{-1} \cdot E}_{=Q^{-1}}$$

$\Rightarrow A = Q^{-1}$

chceme spočítat A^{-1}

$$A^{-1} = (Q^{-1})^{-1} = Q$$

$\Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A$ je invertibilní

Algoritmus pro hledání inverzní matice

$$(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1})$$

důkladněji na cvičení

Transponovaná matice

Def: Transponovaná matice k A je A^T taková, že

$$A^T_{ij} = A_{ji}$$

Př)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Tvrzení: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Symetrická matice: $A = A^T$ (musí být čtvercová)

Př

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Antisymetrická matice není symetrická

Řádková hodnost matice

Def: Řádková hodnost matice rank A je počet lineárně nezávislých řádků matice.

řádky matice jsou lin. nezávislé, když žádný z nich nemůžeme pomocí ostatních vynulovat (pomocí elem. řádk. úprav)

Př:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

řádky matice A byly lin. závislé

$\text{rank}(A) = 2$

Řádková hodnost matice ve schodovitém tvaru je počet jejích nenulových řádků.

Jak spočítat Rank(A): převedeme A na schodovitý tvar a spočítáme nenulové řádky.

Tvrzení: Elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice.

Důsledek: Řádkově ekvivalentní matice mají stejnou řádk. hodnost

Tvrzení: Pokud je matice A řádkově ekvivalentní matici B ve schodovitém tvaru, potom $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ a to se rovná počtu nenulových řádků B.

Důkaz: plyne z předchozích tvrzení

Důsledek: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

Důkaz: cvičení

Def: Čtvercová matice se nazývá <u>regulární</u>, pokud je její hodnost rovna počtu řádků.
(je řádk. ekv. E)

Matice, která není regulární se nazývá <u>singulární</u>.

Tvrzení: Každá regulární matice je řádkově ekvivalentní jednotkové matici.

Náčrt důkazu: Regulární matici upravíme na schodovitý tvar.
Tento tvar nebude mít žádný nulový řádek.
Takovou matici lze upravit na jednotkovou matici.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Tvrzení: Násobení regulární maticí nemění hodnost.

Důkaz: cvičení